Adı-Soyadı :
Numarası : **21.06.2022**

2021-2022 EĞT. ÖĞRT. YILI MAT 102 ANALİZ II DERSİ FİNAL SINAVI SORULARI

1) $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere bir f fonksiyonu $f(x)=\int_0^1 t^n \cdot \cos(tx)\,dt$ şeklinde tanımlanıyor. Buna göre

(a) $f(x)=\dfrac{1}{x^{n+1}}\int_0^x u^n \cos u \cdot du$ olduğunu gösteriniz.

(b) $x>0$ olmak üzere $x \cdot f'(x)+(n+1)f(x)=\cos x$ olduğunu gösteriniz.

2) $y=x^2+1, y=0, x=0$ ve $x=1$ eğri ve doğruları ile sınırlanan bölgenin $y-$ekseni etrafında dönmesi sonucu oluşan cismin hacmini bulunuz.

3) $f:[-1,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{2x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+1$ fonksiyonu veriliyor. $[-1,2]$ aralığının 10 elemanlı düzgün bir P parçalanışı için $A(f,P)$ ve $\ddot{U}(f,P)$ değerlerini bulunuz?

4) (a) $\int e^{\frac{1}{x}} x^{-3} dx$ integralini hesaplayınız.

(b) $\int \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4x+2}}dx$ integralini hesaplayınız.

5) $y=\dfrac{x+2}{x^2-x-2}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

6) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ elipsi ile $x=y^2, x=2y^2$ eğrilerinin 1.bölgede sınırlandırdığı kapalı bölgenin alanını bulunuz.

NOT: Sorular eşit puanlıdır, süre 120 dakikadır. **Başarılar…**

Prof. Dr. İlker Eryılmaz – Doç. Dr. Ayşe Sandıkçı

CEVAP ANAHTARI

1. **a)** $tx = u$ denirse $dt = \frac{1}{x} du$ olur. $t = 0$ için $u = 0$, $t = 1$ için $u = x$ olup,

$$f(x) = \int_0^1 t^n \cos tx \, dx = \int_0^x \frac{u^n}{x^n} \cos u \frac{du}{x} = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x u^n \cos u \, du$$

bulunur.

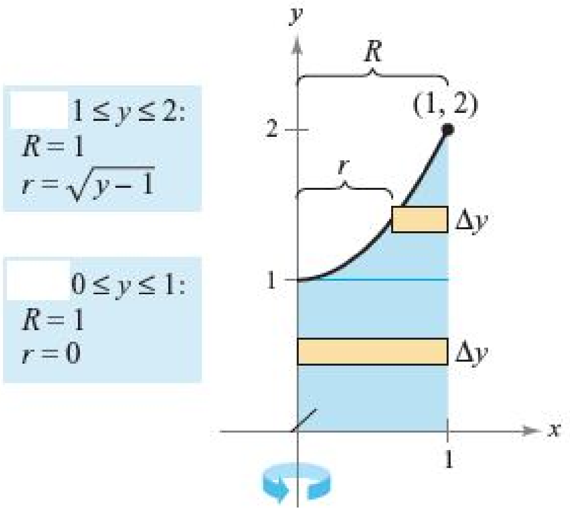
b) $f(x) = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x u^n \cos u \, du$ eşitliğinin her iki yanının x değişkenine göre türevi alınırsa

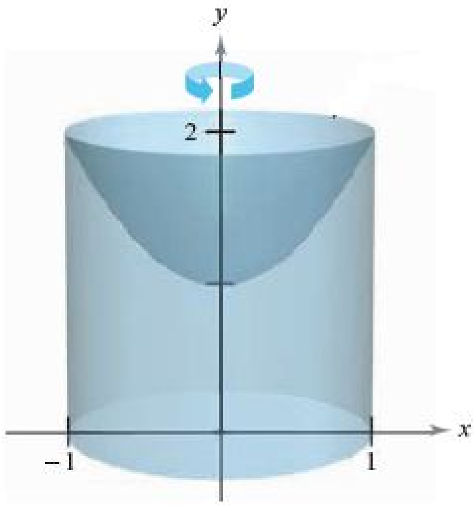
$$f'(x) = -(n+1) \frac{1}{x^{n+2}} \int_0^x u^n \cos u \, du + \frac{1}{x^{n+1}} x^n \cos x$$

$$f'(x) = -(n+1) \frac{1}{x} f(x) + \frac{1}{x^{n+1}} x^n \cos x$$

buradan da $xf'(x) + (n+1) f(x) = \cos x$ bulunur.

2. $y = x^2 + 1, y = 0, x = 0,$ ve $x = 1$ eğrileri ile sınırlanan bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel cismin hacmini hesaplayınız.





$$r(y) = \begin{cases} 0, & 0 \le y \le 1 \\ \sqrt{y-1}, & 1 \le y \le 2 \end{cases}$$

CEVAP ANAHTARI

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^1 (1^2 - 0^2)\, dy + \pi \int_1^2 \left[1^2 - \left(\sqrt{y-1}\right)^2\right] dy \\
&= \pi \int_0^1 1\, dy + \pi \int_1^2 (2 - y)\, dy \\
&= \pi \Big[y \Big]_0^1 + \pi \left[2y - \frac{y^2}{2} \right]_1^2 \\
&= \pi + \pi \left(4 - 2 - 2 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}
$$

③ $P=\{x_0, x_1, \dots, x_9\}$ o.ü.

$\|P\| = \Delta_1 = \Delta_2 = \dots = \Delta_9 = \dfrac{2-(-1)}{9} = \dfrac{1}{3}$ olup

$P = \left\{-1, -\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}, 0, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, 1, \dfrac{4}{3}, \dfrac{5}{3}, 2\right\}$ olur.

$f'(x) = 2x^2 - x \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \dfrac{1}{2}$ olur.

x	$-\infty$	0		$1/2$		$+\infty$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

$$\ddot{U}(f,P) = \sum_{k=1}^{9} M_k \cdot \Delta_k = \sum_{k=1}^{9} M_k(f) \cdot \Delta_k$$

$$= \frac{1}{3}\left[f\left(\frac{-2}{3}\right) + f\left(\frac{-1}{3}\right) + f(0) + f(0) + \max\left\{f\left(\frac{1}{3}\right), f\left(\frac{2}{3}\right)\right\} + f(1) + f\left(\frac{4}{3}\right) + f\left(\frac{5}{3}\right) + f(2) \right]$$

$$A(f,P) = \sum_{k=1}^{9} m_k(f) \cdot \Delta_k$$

$$= \frac{1}{3}\left[f(-1) + f\left(\frac{-2}{3}\right) + f\left(\frac{-1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) + f(1) + f\left(\frac{4}{3}\right) + f\left(\frac{5}{3}\right) \right]$$

bulunur.

(4a) $J=\int e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^3}\,dx=\int e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x}\cdot dx$ için $\frac{1}{x}=u$

alınırsa $-\frac{1}{x^2}\cdot dx=du$ olup

$$J=\int e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x}\cdot dx=\int e^{u}\cdot -du\cdot u$$

u	dv
t	$+\;e^t$
1	$-\;e^t$
0	e^t

$$=-\int t\cdot e^{t}\cdot dt$$

$$=-\left[t\cdot e^{t}-e^{t}\right]$$

$$=e^{u}-u\cdot e^{u}=e^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}\cdot e^{\frac{1}{x}}+c \text{ olur.}$$

(4b) $$I=\int\frac{x}{\sqrt{x^2+4x+2}}\,dx=\int\frac{x+2-2}{\sqrt{x^2+4x+2}}\,dx$$

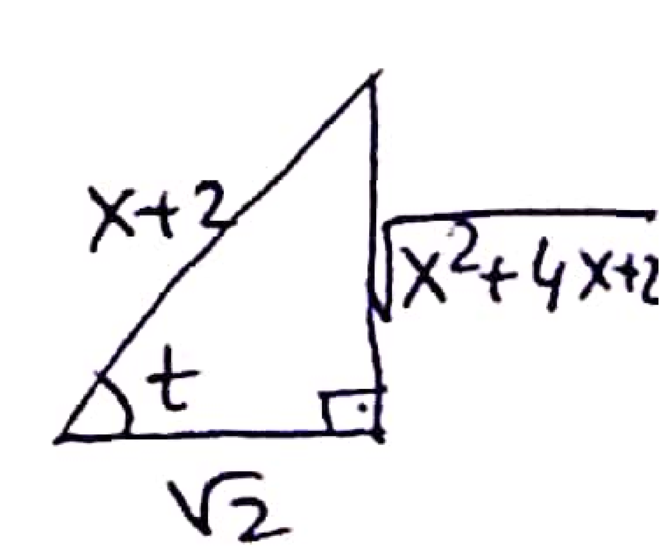
$$=\int\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+2}}\,dx-2\int\frac{1}{\sqrt{x^2+4x+2}}\,dx=I_1+I_2 \text{ olsun.}$$

$$I_1=\int\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+2}}\,dx=\int\frac{du/2}{\sqrt{u}}=\sqrt{u}=\sqrt{x^2+4x+2}\;\cdots\;(*)$$

$x^2+4x+2=u$
$(2x+4)\,dx=du$

$(x+2)=\sqrt{2}\,\text{Sec}t$
$dx=\sqrt{2}\,\text{Sec}t\cdot\tan t\cdot dt$

$$I_2=-2\int\frac{1}{\sqrt{x^2+4x+2}}\,dx=-2\int\frac{1}{\sqrt{(x+2)^2-2}}\,dx$$



$$=-2\int\frac{\cancel{\sqrt{2}}\,\text{Sec}t\cdot\cancel{\tan t}\cdot dt}{\cancel{\sqrt{2}}\cancel{\tan t}}=-2\ln|\tan t+\text{Sec}t|$$

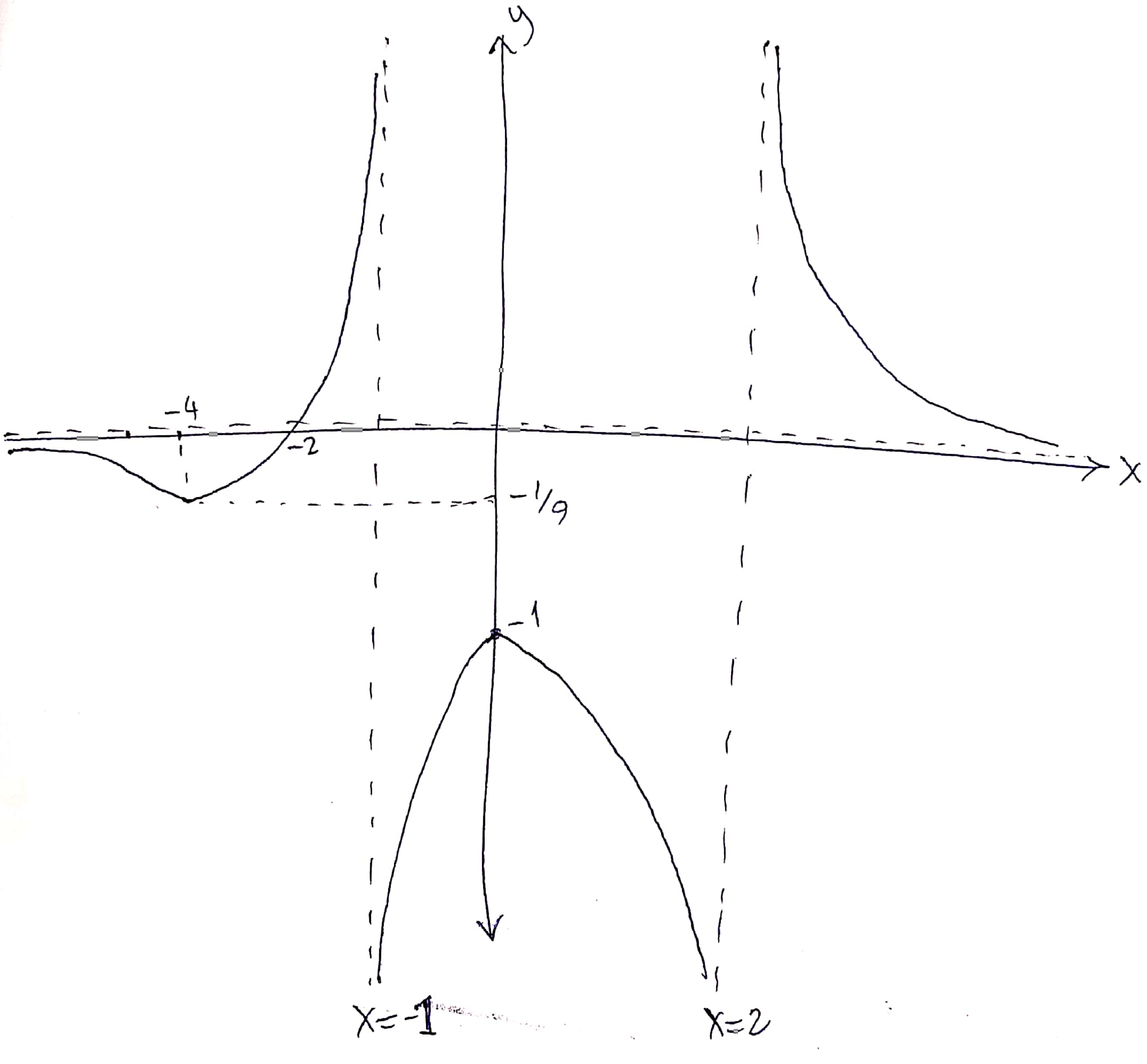
$$=-2\ln\left|\frac{x+2}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{x^2+4x+2}}{\sqrt{2}}\right| \text{ olup } (*) \text{ ile beraber sonuç bulunur.}$$

⑤ $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-x-2}$ için $f(x) = \dfrac{x+2}{(x-2)(x+1)}$ olup

- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ olur.
- $f(-x) \neq f(x)$ & $f(-x) \neq -f(x)$ old.dan ne tek nede çifttir.
- $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \dfrac{1}{-3 \cdot 0^+} = -\infty$
  $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \dfrac{1}{-3 \cdot 0^-} = +\infty$ } düşey asimtot
- $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \dfrac{4}{3 \cdot 0^+} = +\infty$
  $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \dfrac{4}{3 \cdot 0^-} = -\infty$ } düşey asimtot olur.
- $\lim\limits_{x \to \mp\infty} f(x) = 0$ old.dan $y=0$ doğrusu $\mp\infty$ kolda yatay asimtottur.
- $f'(x) = \dfrac{1 \cdot (x^2-x-2) - (x+2) \cdot (2x-1)}{(x^2-x-2)^2} = \dfrac{-x(x+4)}{(x^2-x-2)^2}$

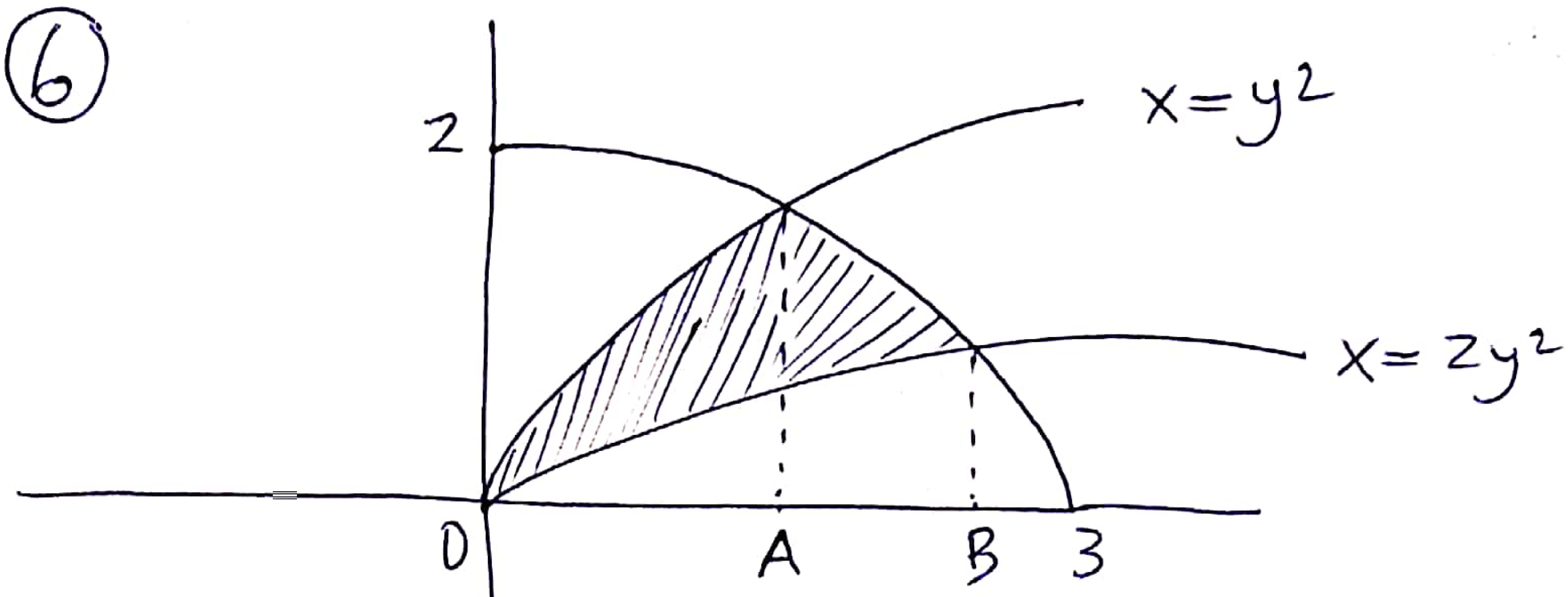
olup

x	$-\infty$		-4		-1		0		2		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
f	$y=0$	↘	$-1/9$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$y=0$



y
-4
-2
X
-1/9
-1
X=-1
X=2

6



$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \Rightarrow 4x^2+9y^2-36=0$$

$$\to 4x^2+9x-36=0 \Rightarrow x=+\frac{3}{8}\left(\sqrt{73}-3\right)$$

$$\to 4x^2+\frac{9}{2}x-36=0 \Rightarrow x=\frac{3}{16}\left(\sqrt{265}-3\right)$$

$$\text{ALAN}=\int_0^A\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{x}{2}}\right)dx+\int_A^B\left(2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}-\sqrt{\frac{x}{2}}\right)dx$$

$$=\int_0^A\left(x^{1/2}-\frac{x^{1/2}}{\sqrt{2}}\right)dx+\int_A^B\left[\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}\right]dx$$

$$=\frac{2x\sqrt{x}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^A+\left[\frac{1}{3}x\sqrt{9-x^2}+9/3\arcsin\frac{x}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}x\sqrt{x}\right]\Big|_A^B$$

olur.